

(۱) ذره‌ای به جرم m مقید به حرکت در فضای بین دو کره هم مرکز غیر قابل نفوذ به شعاع‌های $r = a$ و $r = b$ است که $b > a$ است (ذره فقط در فضای بین دو کره حرکت می‌کند و نمی‌تواند به داخل کره‌ها نفوذ کند). هیچ پتانسیل دیگری به ذره اعمال نمی‌شود. انرژی حالت پایه و ویژه حالت مربوط به آن را به دست آورید.

(۲) در زمان $t = 0$ تابع موج اتم هیدروژن به صورت زیر است:

$$\psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(2\psi_{100} + \psi_{210} + \sqrt{2}\psi_{211} + \sqrt{3}\psi_{21-1})$$

که اعداد زیر نویس مربوط به اعداد کوانتومی n و l و m هستند. از اثرات اسپین چشم پوشی کنید.

الف- مقدار چشم داشتی انرژی برای این حالت چقدر است؟

ب- احتمال یافتن سامانه در حالتی با مشخصات $l = 1$ و $m = 1$ به صورت تابعی از زمان چقدر است؟

ج- احتمال یافتن الکترون در فاصله 10^{-10} cm از پروتون در زمان $t = 0$ چقدر است؟

د- فرض کنید در یک اندازه‌گیری مشخصات $l = 1$ و $m = 1$ ثبت می‌شود. تابع موج بلافاصله پس از این

اندازه‌گیری را به دست آورید و آن را بر حسب توابع ψ_{nlm} بیان کنید.

(۳) الکترونی در بالای یک سطح رسانای غیرقابل نفوذ حرکت می‌کند. این الکترون توسط این سطح جذب می‌شود (به

دلیل بار تصویری خودش). از آنجایی که سطح غیرقابل نفوذ است الکترون به سطح نزدیک شده و دور می‌شود و

این حرکت ادامه پیدا می‌کند.

الف- معادله شرودینگر را برای این الکترون بنویسید و ویژه مقادیر و ویژه توابع آن را به دست آورید. محور y را

عمود بر سطح در نظر بگیرید.

ب- چگونگی وابستگی x و z ویژه حالت‌ها را به دست آورید.

ج- با در نظر گرفتن شرایط مرزی، حالت پایه و انرژی آن را به دست آورید.

د- ویژه مقادیر انرژی گسسته و پیوسته این سامانه را به دست آورید.

(۴) الف- ذره‌ای با اسپین $1/2$ را در نظر بگیرید که در حالت اسپینی ویژه حالت عملگر S_z متناظر با ویژه مقدار $\frac{\hbar}{2}$ قرار

دارد. این ذره از یک دستگاه اشترن-گرلاخ عبور می‌کند که میدان مغناطیسی آن در راستای $\hat{n} = \cos \theta \hat{z}$

$\sin \theta \hat{x}$ قرار دارد. احتمال یافتن ذره خروجی از این دستگاه در حالتی متناظر با ویژه مقدار $\frac{\hbar}{2}$ عملگر S_n چقدر

است؟

ب- حال یک دستگاه اشترن-گرلاخ با جهت‌گیری متغیر را در نظر بگیرید. فرض کنید که میدان مغناطیسی می‌تواند

در یکی از سه جهت زیر قرار داشته باشد:

$$\hat{n}_1 = \cos \theta \hat{z} - \sin \theta \hat{x}, \quad \hat{n}_2 = \cos \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \hat{z} - \sin \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \hat{x}, \quad \hat{n}_3 = \cos \left(\theta + \frac{4}{3} \pi \right) \hat{z} - \sin \left(\theta + \frac{4}{3} \pi \right) \hat{x}$$

که احتمال هر کدام از این جهت‌گیرها $1/3$ است. اگر ذره در حالتی متناظر به ویژه مقدار $\frac{\hbar}{2}$ عملگر S_z از این

دستگاه عبور کند، احتمال آنکه در حالتی متناظر با ویژه مقدار $\frac{\hbar}{2}$ خارج شود چقدر است؟

ج- در قسمت قبل احتمال را محاسبه کنید اگر دستگاه اشتر-گرلاخ بتواند با احتمال یکسان هر جهت دلخواهی را دارا باشد.

(۵) پتانسیلی به صورت تابع دلتای رانشی را در نظر بگیرید:

$$V(r) = \frac{\hbar^2 g^2}{2\mu} \delta(r - a)$$

الف- ویژه حالت‌های انرژی را به دست آورید.

ب- در حالت حدی $g^2 \rightarrow \infty$ ، پتانسیل مربوط به یک پوسته کروی غیر قابل نفوذ خواهد شد. در این شرایط در مورد ویژه حالت‌های انرژی بحث کنید.

(۶) ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الف- ویژه مقادیر و ویژه حالت‌های آن را به دست آورید. آیا این ویژه بردارها تشکیل یک پایه می‌دهند؟

ب- تابع $f(x) = e^{Ax}$ را به صورت کامل محاسبه کنید.

(۷) ذره‌ای با اسپین $\frac{1}{2}$ را در نظر بگیرید که دارای هامیلتونی زیر است:

$$H = \frac{a}{\hbar^2} (S_x^2 - S_y^2) - \frac{a}{\hbar^2} S_z^2$$

که در آن a یک ثابت است.

الف- شکل ماتریسی هامیلتونی را به دست آورید و ویژه مقادیر انرژی را محاسبه کنید.

ب- ویژه بردارهای انرژی را محاسبه کنید و در تبهگنی آنها نتیجه‌گیری نمایید.